Objetivos a cubrir **Código : MAT-CDI.4**

- Función inyectiva. Función inversa.
- Definición formal de límite. Límites laterales. Cálculo de límites.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 *: Demuestre que la función* $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2+1}$ *no es una función inyectiva.*

Solución : Es conocido que una función f es inyectiva si para todo $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f$, tal que,

$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{se tiene que} \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Observemos que si consideramos $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, tenemos que $x_1 \neq x_2$, pero

$$f(-1) = \frac{(-1)^3 - (-1)}{(-1)^2 + 1} = \frac{-1+1}{1+1} = 0 \qquad \text{y} \qquad f(1) = \frac{(1)^3 - (1)}{(1)^2+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0,$$

es decir,

$$-1 = x_1 \neq x_2 = 1, \qquad \text{pero} \qquad f(x_1) = 0 = f(x_2),$$

por lo tanto, f **no** es inyectiva. ★

Ejemplo 2 *: Hallar el valor de* $\cos(\arctan x)$

Solución : Es conocido que

$$\cos(\cdot) = \frac{1}{\sec(\cdot)} \qquad \text{y} \qquad \sec^2(\cdot) = 1 + \tan^2(\cdot)$$

así,

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sec(\arctan x)}$$

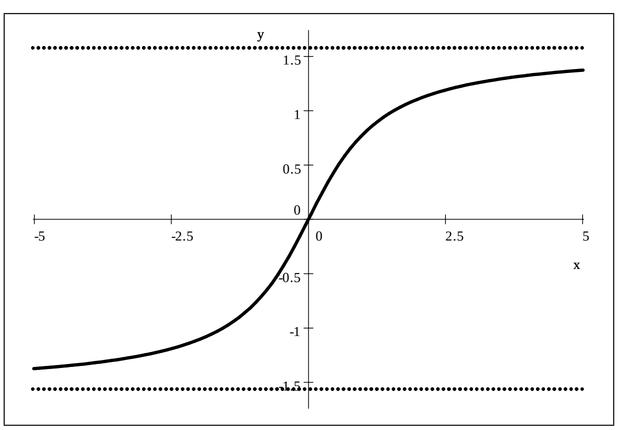
por lo que,

$$\sec^2(\arctan x) = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + (\tan(\arctan x))^2 = 1 + x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sec^2(\arctan x) = 1 + x^2$$

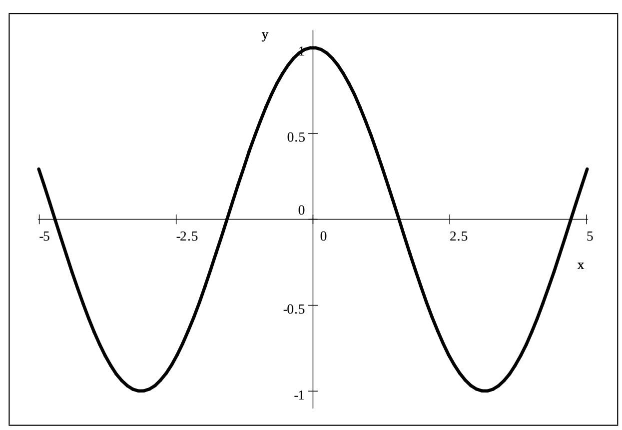
de aquí

$$\sec(\arctan x) = \pm\sqrt{1+x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos(\arctan x) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

como el rango de la función arcotangente es $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ y la función coseno es ese intervalo es positiva



$f(x) = \arctan x$



$f(x) = \cos x$

entonces

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

★

Ejemplo 3 *: Considere la función* $h(x) = \dfrac{2x-5}{x+3}$

1. *Diga si la función* h *es una función inyectiva ó no.*
2. *Halle el intervalo donde* h *es creciente ó decreciente.*
3. *¿La función* h *admite inversa?*
4. *En caso afirmativo, halle una formula para la inversa de* h*.*
5. *Halle el* $\text{Dom } h^{-1}$ *y* $\text{Rgo } h^{-1}$*.*
6. *Grafique* h *y* h^{-1}*.*

Solución : 1. Es conocido que una función f es inyectiva si para todo $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$, tal que,

$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{se tiene que} \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$$

ó equivalentemente

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2$$

Observemos que la función h se puede escribir como

$$h(x) = \frac{2x-5}{x+3} = 2 - \frac{11}{x+3}$$

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$, tal que, $h(x_1) = h(x_2)$, como

$$h(x_1) = 2 - \frac{11}{x_1+3} \qquad \text{y} \qquad h(x_1) = 2 - \frac{11}{x_2+3}$$

entonces,

$$h(x_1) = h(x_2) \quad \Longrightarrow \quad 2 - \frac{11}{x_1+3} = 2 - \frac{11}{x_2+3} \quad \overset{\substack{\text{Restamos } 2 \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} \quad -\frac{11}{x_1+3} = -\frac{11}{x_2+3} \quad \overset{\substack{\text{Multiplicamos por } -\frac{1}{11} \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{x_1+3} = \frac{1}{x_2+3}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)}}}{\Longrightarrow} \quad x_1 + 3 = x_2 + 3 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Restamos } 3}}{\Longrightarrow} \quad x_1 = x_2$$

luego

$$h(x_1) = h(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2,$$

por lo tanto, h es inyectiva.

2. Una función f es **creciente** es un intervalo I si para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que, $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, es decir,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2),$$

mientras que, una función f es **decreciente** es un intervalo I si para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que, $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$, es decir,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) > f(x_2).$$

Observemos que la función h se puede escribir como

$$h(x) = \frac{2x-5}{x+3} = 2 - \frac{11}{x+3}$$

y que $\text{Dom } h = \mathbb{R} - \{-3\}$, sean $x_1, x_2 \in \text{Dom } h$, tal que $x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \quad \overset{\substack{\text{Sumamos } 3 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)} \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} \quad x_1 + 3 < x_2 + 3 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{x_1+3} > \frac{1}{x_2+3} \quad \overset{\substack{\text{Multiplicamos por } -11 \\ \text{(la desigualdad cambia)} \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} \quad \frac{-11}{x_1+3} > \frac{-11}{x_2+3} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sumamos } 2 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}{\Longrightarrow} \quad 2 - \frac{11}{x_1+3} < 2 - \frac{11}{x_2+3}$$

con lo que,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2 - \frac{11}{x_1+3} < 2 - \frac{11}{x_2+3},$$

es decir,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad h(x_1) < h(x_2),$$

por lo tanto, h es una función creciente en todo su dominio.

3. Por la parte 1 tenemos que h es inyectiva, por lo tanto, admite inversa.

4. Para hallar la expresión de h^{-1} despejamos x de $y = \dfrac{2x-5}{x+3}$, puesto que

$$h(x) = \frac{2x-5}{x+3} = 2 - \frac{11}{x+3},$$

entonces,

$$y = 2 - \frac{11}{x+3} \implies y - 2 = -\frac{11}{x+3} \implies \frac{2-y}{11} = \frac{1}{x+3} \implies x + 3 = \frac{11}{2-y} \implies x = \frac{11}{2-y} - 3,$$

con lo que

$$h^{-1}(x) = \frac{11}{2-x} - 3$$

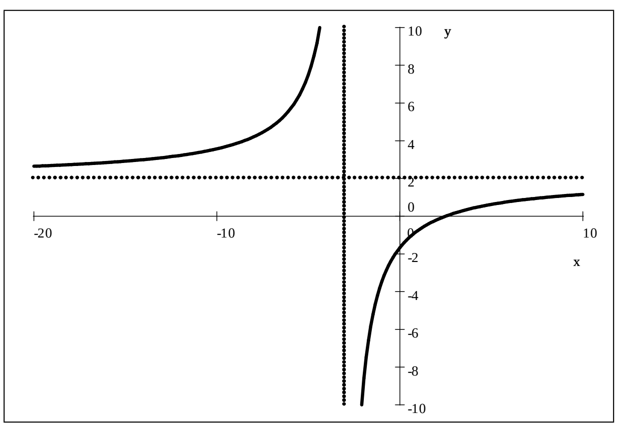
5. Tenemos que h^{-1} tiene sentido para todo x, tal que, $2 - x \neq 0 \Longrightarrow x \neq 2$, luego

$$\text{Dom } h^{-1} = \mathbb{R} - \{2\}$$

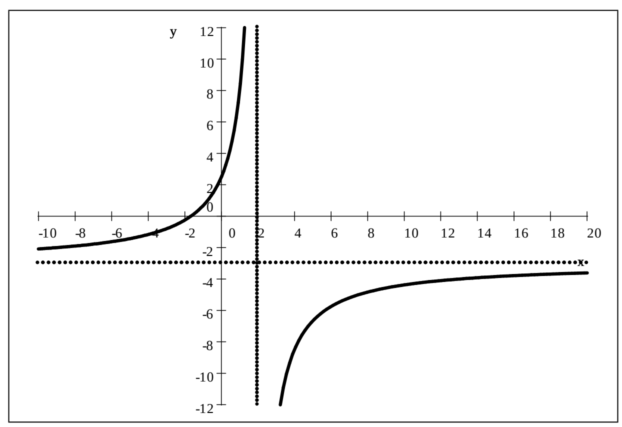
y

$$\text{Rgo } h^{-1} = \text{Dom } h = \mathbb{R} - \{-3\}$$

6. Usando traslaciones horizontales y verticales sobre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$



$$h(x) = \frac{2x-5}{x+3}$$



$$h^{-1}(x) = \frac{11}{2-x} - 3$$

★

Ejemplo 4 *: Usando la definición formal de límite, demuestre que*

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{3+2x}{5-x} = \frac{8}{9}$$

Solución : Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$, tal que,

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta,$$

es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$, tal que,

$$\left| \frac{3+2x}{5-x} - \frac{8}{9} \right| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta,$$

así, por propiedades del valor absoluto, se tiene

$$\left|\frac{3+2x}{5-x}-\frac{8}{9}\right|=\left|\frac{9(3+2x)-8(5-x)}{9(5-x)}\right|=\left|\frac{26x-13}{9(5-x)}\right|=\left|\frac{26(x-1/2)}{9(5-x)}\right|=\left|\frac{26}{9(5-x)}\right|\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{26}{9}\frac{1}{|5-x|}\left|x-\frac{1}{2}\right|,$$

puesto que $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta$, consideremos $\delta=1$, entonces

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|<1 \overset{\substack{\text{Desigualdad con valor absoluto}\\ \text{(aplicamos definición)}}}{\Longrightarrow} -1<x-\frac{1}{2}<1 \overset{\substack{\text{Sumamos } \frac{1}{2}\\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}{\Longrightarrow} -1+\frac{1}{2}<x<1+\frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$$

$$\underset{\substack{\text{Multiplicamos por } -1\\ \text{(la desigualdad cambia)}}}{\Longrightarrow} \frac{1}{2}>-x>-\frac{3}{2} \underset{\substack{\text{Sumamos } 5\\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}{\Longrightarrow} 5+\frac{1}{2}>5-x>5-\frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{11}{2}>5-x>\frac{7}{2} \underset{\substack{\text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)}\\ \text{(la desigualdad cambia)}}}{\Longrightarrow} \frac{2}{11}<\frac{1}{5-x}<\frac{2}{7}$$

luego,

$$\left|\frac{3+2x}{5-x}-\frac{8}{9}\right|=\frac{26}{9}\frac{1}{|5-x|}\left|x-\frac{1}{2}\right| \underset{\substack{\text{ya que}\\ \frac{1}{5-x}<\frac{2}{7}}}{<} \frac{26}{9}\left(\frac{2}{7}\right)\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{52}{63}\left|x-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

es decir,

$$\frac{52}{63}\left|x-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon \Longrightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{63}{52}\varepsilon$$

si tomamos

$$\delta=\min\left\{1,\frac{63}{52}\varepsilon\right\}$$

se cumple que

$$\lim_{x\to1/2}\frac{3+2x}{5-x}=\frac{8}{9}$$

★

Ejemplo 5 *: Considere la función*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+2}{\cos\pi x} & si \quad x<1\\[2mm] \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & si \quad x>1\end{cases}$$

Determine, si existen: ***a)*** $f(1)$; ***b)*** $\lim_{x\to1^-}f(x)$; ***c)*** $\lim_{x\to1^+}f(x)$; ***d)*** $\lim_{x\to1}f(x)$.

Solución : Tenemos que

$\rightarrow$	1 $\leftarrow$
$\dfrac{3x+2}{\cos\pi x}$	$\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

así

a) $f(1)$ no está definido.

b) $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{3x+2}{\cos\pi x}=\frac{3(1)+2}{\cos\pi(1)}=\frac{5}{-1}=-5$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(1)^2-1}{\sqrt{(1)}-1} = \dfrac{0}{0} \quad \leftarrow \quad \text{Indeterminado}$

Levantamos la indeterminación, aplicamos conjugada y factorizamos

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} (x+1)\left(\sqrt{x}+1\right) = 4,$$

es decir,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4.$$

d) Puesto que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

concluimos que

$$\lim_{x\to 1} f(x) \qquad \text{no existe}$$

★

Ejemplo 6 *: Calcular el siguiente límite, si es que existen*

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$$

Solución : Indeterminación $\dfrac{0}{0}$, factorizamos para levantar la indeterminación, obtenemos

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3},$$

estudiamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} (-1) = -1 \\ \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} 1 = 1 \end{cases}$$

puesto que los límites laterales son diferentes, entonces el límite no existe. ★

Ejemplo 7 *: Calcular el siguiente límite, si es que existen*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x}}{1-\tan x}$$

Solución : Indeterminación $\dfrac{0}{0}$, factorizamos para levantar la indeterminación, aplicamos la conjugada

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x}}{1-\tan x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x}\right)}{(1-\tan x)} \frac{\left(\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x} + \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\cos^4 x}\right)}{\left(\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x} + \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\cos^4 x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{(1-\tan x)\left(\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x} + \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\cos^4 x}\right)}$$

Observemos que

$$1-\tan x = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

así

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{(1-\tan x)\left(\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x}+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{sen} x-\cos x)(\operatorname{sen} x+\cos x)}{\left(\dfrac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\left(\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x}+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos^4 x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\cos x(\operatorname{sen} x+\cos x)}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x}+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos^4 x}}$$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}}=\frac{-1}{\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}}=-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

Luego

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}}{1-\tan x}=-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

★

Ejercicios

1. Demuestre que la función $f(x)=x^4$ no es inyectiva.
2. Demuestre que la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es inyectiva, pero $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ no lo es.
3. Demuestre que una función f es inyectiva, si y solo si es estrictamente monótona, es decir, f es siempre creciente ó es siempre decreciente.
4. Diga en que intervalo las siguientes funciones son crecientes ó decrecientes (ver guía 1, ejercicios 14 al 26)

1. $f(x)=mx+b$	2. $f(x)=x^2$	3. $f(x)=x^3$	4. $f(x)=x^4$	5. $f(x)=\dfrac{1}{x}$
6. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	7. $f(x)=\sqrt{x}$	8. $f(x)=\sqrt[3]{x}$	9. $f(x)=\sqrt{x^3-2}$	10. $f(x)=\dfrac{3}{x^2+1}$
11. $g(x)=x^2-4x$	12. $g(x)=\dfrac{8-3x}{x-2}$	13. $h(x)=\dfrac{2x-5}{x+3}$	14. $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+1}$	

5. Usando el ejercicio 3, diga cuales de las funciones del ejercicio 4 es inyectiva.
6. Demuestre que si f y g son funciones crecientes, entonces $f\circ g$ es una función creciente.
7. Demuestre que si f y g son funciones decrecientes, entonces $f\circ g$ es una función creciente.
8. Demuestre que si f es una función creciente y g es una función decreciente, entonces $f\circ g$ es una función decreciente.
9. Sea $f:\operatorname{Dom} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función creciente. Demuestre que la recta que pasa por dos puntos cualesquiera pertenecientes a la función tiene pendiente positiva.
10. Sea $f:\operatorname{Dom} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función decreciente. Demuestre que la recta que pasa por dos puntos cualesquiera pertenecientes a la función tiene pendiente negativa.
11. Encuentre una fórmula para f^{-1} y su dominio, así como el rango de f

1. $f(x)=\sqrt{x-5}$	2. $f(x)=x^2-2x$	3. $f(x)=\dfrac{3}{x-6}$
4. $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$	5. $f(x)=3-\operatorname{sen} 2x$	6. $f(x)=\tan\left(\sqrt{2x}-1\right)$
7. $f(x)=\dfrac{1-x}{2-x}$	8. $f(x)=\dfrac{x+3}{4-x}$	9. $f(x)=\operatorname{sen}\left(x^2+x-2\right)$
10. $f(x)=\cos\left(2-\sqrt[3]{x}\right)$	11. $f(x)=(\operatorname{sen} x-2)^3$	12. $f(x)=\operatorname{sen}\left(2\sqrt{x^4+2x^2+1}\right)$

12. Verifique que la inversa de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es ella misma.

13. Sea $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ y suponga que $bc - ad \neq 0$

    (a) Encuentre la fórmula para $y = f^{-1}(x)$.

    (b) ¿Por qué se necesita la condición $bc - ad \neq 0$?

    (c) ¿Qué condición sobre a, b, c y d harán que $f = f^{-1}$?

14. Sin utilizar la calculadora encuentre los siguientes valores

    1. $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$ 2. $\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 3. $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 4. $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

    5. $\operatorname{arcsen}(2)$ 6. $\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 7. $\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 8. $\cos\left(2\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)$

    9. $\operatorname{sen}\left(\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right) + \arccos\left(\dfrac{5}{13}\right)\right)$ 10. $\cos\left(\arccos\left(\dfrac{4}{5}\right) + \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{12}{13}\right)\right)$

15. Hallar los siguientes valores

    1. $\tan(\operatorname{arcsen} x)$ 2. $\operatorname{sen}(\arctan x)$ 3. $\cos(\operatorname{arcsen} x)$ 4. $\tan(2\arctan x)$

    5. $\cos(2\operatorname{arcsen} x)$ 6. $\sec(\arctan x)$ 7. $\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} x)$ 8. $\cos(\arctan x)$

16. Determine el dominio de la función

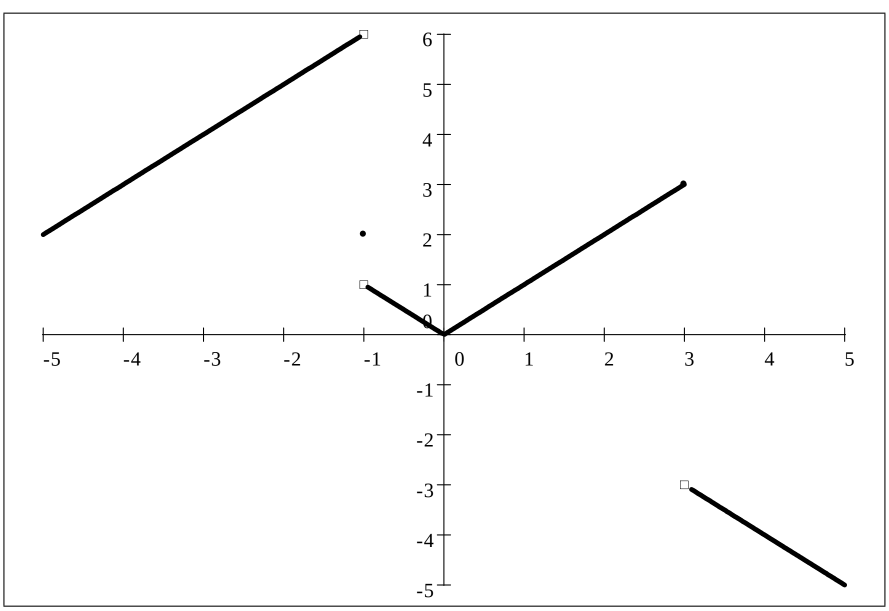
    1. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 - \operatorname{arcsen} x}$ 2. $f(x) = \dfrac{1 - \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{x}}$ 3. $h(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen}\left(8 - x^3\right)}{\sqrt[3]{x} - 2}$

    4. $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{arcsen} x}$ 5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{arcsen} x}}$ 6. $h(x) = \arccos\left(\sqrt{x^2 + 5x + 6}\right)$

    7. $h(x) = \sqrt{4 - x^2}\ \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{3 - x}\right)$ 8. $h(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x^2 - x}{x+3}\right) - \sqrt{\dfrac{x^2 - x}{x+3}}$

    9. $f(x) = \sqrt{x} + \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x-5}{x^2 - x}\right)$ 10. $g(x) = \cot\left(\operatorname{arcsen}\left(x^2 - 5x + 6\right)\right) - \sqrt[4]{\operatorname{arcsen}\left(x^2 - 2x - 3\right)}$

17. Considerando la grafica de la función f



Calcular

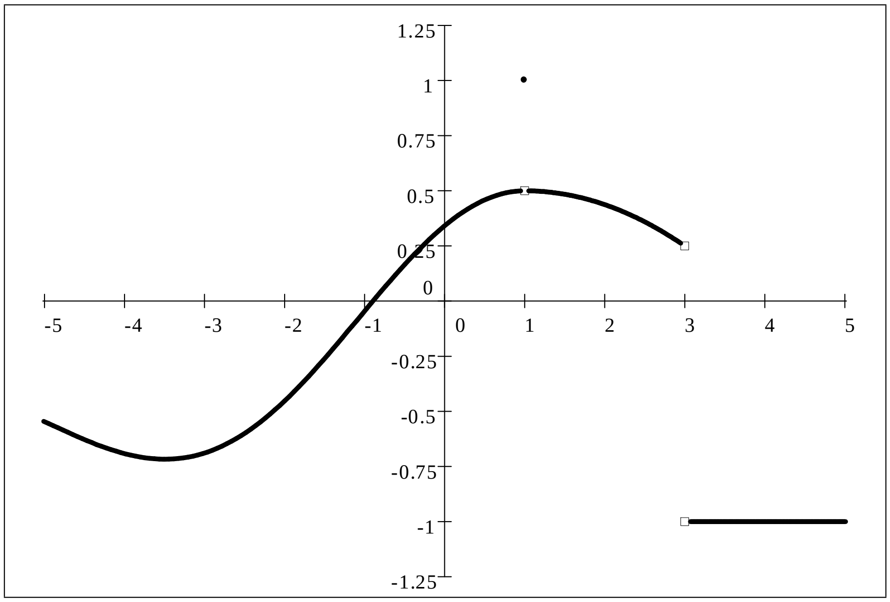
1. $f(-1)$
2. $\displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x)$
4. $\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x)$
5. $f(3)$
6. $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} f(x)$
7. $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} f(x)$
8. $\displaystyle\lim_{x \to 3} f(x)$

18. Calcular

1. $f(1)$ 2. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ 4. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

5. $f(3)$ 6. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ 7. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ 8. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

considerando la grafica de la función f



19. Calcular

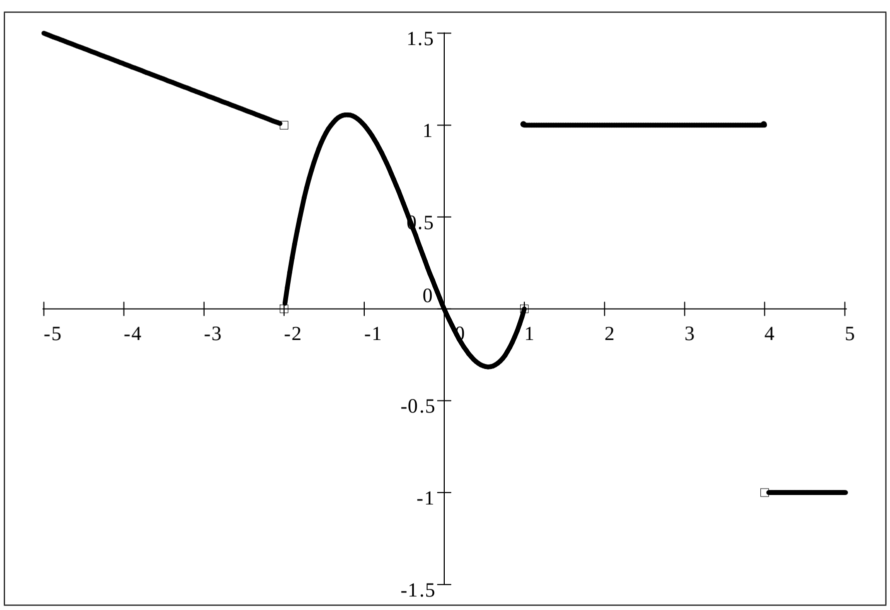
1. $f(-2)$ 2. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ 4. $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

5. $f(0)$ 6. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ 7. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 8. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

9. $f(1)$ 10. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ 11. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ 12. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

13. $f(4)$ 14. $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ 15. $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ 16. $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

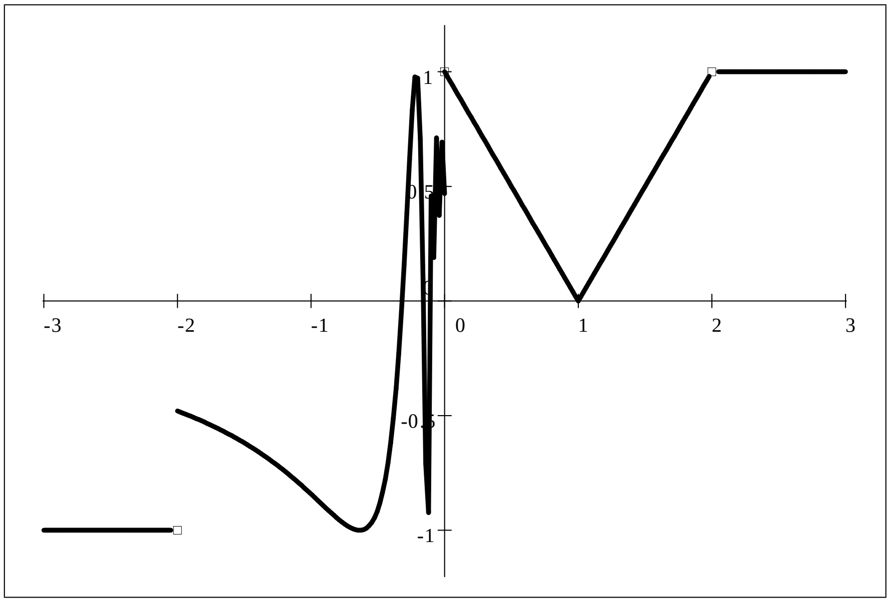
considerando la grafica de la función f



20. Calcular

1.	$f(-2)$	2.	$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$	3.	$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$	4.	$\lim\limits_{x\to -2} f(x)$
5.	$f(0)$	6.	$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$	7.	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$	8.	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
9.	$f(2)$	10.	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$	11.	$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$	12.	$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

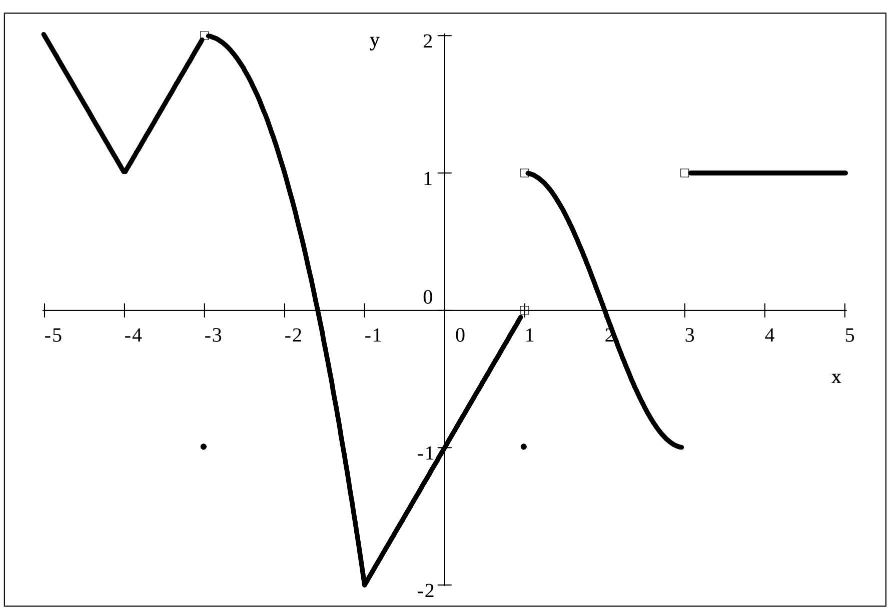
considerando la grafica de la función f



21. Calcular

1.	$f(-3)$	2.	$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$	3.	$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$	4.	$\lim\limits_{x\to -3} f(x)$
5.	$f(-1)$	6.	$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$	7.	$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$	8.	$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$
9.	$f(1)$	10.	$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$	11.	$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$	12.	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
13.	$f(3)$	14.	$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$	15.	$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$	16.	$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

considerando la grafica de la función f



22. Determine, si existen: **a)** $f(c)$; **b)** $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$; **c)** $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$; **d)** $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.

1. $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x<2 \\ x^3 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$; $c=2$

2. $f(x)=\begin{cases} 1-x^4 & \text{si} \quad x<-1 \\ 3 & \text{si} \quad x=-1 \\ x+1 & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$; $c=-1$

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x}{|\operatorname{sen} x-1|} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{9-x^2}{x^3-1} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$; $c=0$

4. $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{37-x^3} & \text{si} \quad -3\leq x<4 \\ -3 & \text{si} \quad x=4 \\ \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$; $c=4$

5. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{2x+5} & \text{si} \quad x<2 \\ \dfrac{3x}{2x-2} & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$; $c=2$

6. $f(x)=\begin{cases} 3|x-2| & \text{si} \quad x<-2 \\ 0 & \text{si} \quad x=-2 \\ \sqrt{2x^2+8} & \text{si} \quad x>-2 \end{cases}$; $c=-2$

7. $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & \text{si} \quad x<1 \\ x^3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$; $c=1$

8. $f(x)=\begin{cases} 1+x^2 & \text{si} \quad x<0 \\ -3 & \text{si} \quad x=0 \\ 1-x^2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$; $c=0$

23. Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to 4}(x-1)^3$
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x-2}$
3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5}{3-2x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\cos x}{\sqrt{1-x}}$
6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x+5}{x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$
8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$
10. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$
11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1}{\operatorname{sen}^2(\pi x)}$
12. $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{t_0}}{t-t_0}$
13. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{x^4-b^4}{x^3-b^3}$
14. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$
15. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$
16. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+4}{2x^2-x+5}$
17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-x^3}{x^2-2x}$
18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$
19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{-x+1}-1}{\sqrt{-x+4}-2}$
20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$
21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$
22. $\lim\limits_{t\to 3}\dfrac{\sqrt{t+1}-2}{t^2-9}$
23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{3}}{x}$
24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{7x^2+2}-3}{\sqrt{3+2x}+x}$
25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^4}}$
26. $\lim\limits_{m\to 2}\sqrt{\dfrac{m^3-8}{m^2-4}}$
27. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{x^2-c^2}{x^2+2cx+c^2}$
28. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$
29. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x+3}$
30. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^4-16}{x^3-8}}$
31. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\sqrt{\dfrac{8x^3-27}{4x^2-9}}$
32. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$
33. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$
34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\operatorname{sen}^3 x+8\operatorname{sen}^2 x}{\cos x-1}$
35. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{\dfrac{x}{x+5}}\left(\dfrac{x^2-16}{x-4}\right)^2$
36. $\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{x^2+x+a-a^2}{x+a}$
37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sec x+1}{\tan x}$
38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x^2+4}-\sqrt{x+9}}$
39. $\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{t^4-256}{t^2-16}$
40. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{5t^3+8t^2}{3t^4-16t^2}$
41. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt[3]{5x^2+7}}$
42. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{\sqrt[3]{10x+17}-3}$
43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
44. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x^2+7}}$
45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+9}-3}{\sqrt{4-x}-2}$

46. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x^2-3}{x}-\frac{3x-1}{7-x}}{1-\frac{4}{x+1}}$ 47. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3x-1}}{x-\frac{3x}{x+2}}$ 48. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\frac{3x^2+4}{x^2+4}}}{x^2}$

49. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\operatorname{sen}^2 x-1}{\cos x-\cos^2 x}$ 50. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}\quad a,b>0$ 51. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{4+\sqrt{x}}-2}{\sqrt{x}}$

52. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{5-x}}{2x^2-9x+10}$ 53. $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}$ 54. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{a+2(x-1)}-\sqrt{a}}{x-1}$

55. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ 56. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ 57. $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{5x^2-5x+5x^3+x^4-6}{4x^2-11x+x^3-30}$

24. Considerando los límites por la derecha y por la izquierda, demuestre que $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

25. Calcular los siguientes límites cuando existan, utilizando los límites laterales cuando sea necesario.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{|x+2|}{x+2}$ 3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}h(x)\ ;\ h(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} & \text{si}\quad x>1\\ 2x-2 & \text{si}\quad x<1\end{cases}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$ 5. $\displaystyle\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$ 6. $\displaystyle\lim_{x\to 1}g(x)\,;\ g(x)=\begin{cases}2x^3 & \text{si}\quad x<1\\ \sqrt{x+3} & \text{si}\quad x\geq 1\end{cases}$

26. Dadas las siguientes funciones

$$a.\ f(x)=\begin{cases}x^2-2x-1 & \text{si}\quad x<2\\ 3-2x & \text{si}\quad x\geq 2\end{cases}\qquad b.\ f(x)=\begin{cases}-x^3 & \text{si}\quad x<2\\ (x+1)^2 & \text{si}\quad x>2\end{cases}$$

1. Encuentre $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$ 2. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$? 3. Trace la gráfica de f

27. Sea

$$h(x)=\begin{cases}x & \text{si}\quad x<0\\ x^2 & \text{si}\quad 0<x\leq 2\\ 8-x & \text{si}\quad x>2\end{cases}$$

(a) Evalúe los siguientes límites, si existen.

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$ 3. $\lim\limits_{x\to 1}h(x)$ 4. $\lim\limits_{x\to 2^-}h(x)$ 5. $\lim\limits_{x\to 2^+}h(x)$ 6. $\lim\limits_{x\to 2}h(x)$

(b) Trace la gráfica de h

28. Sean

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3 & \text{si}\quad x\leq 1\\ x+1 & \text{si}\quad x>1\end{cases}\qquad \text{y}\qquad g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si}\quad x\leq 1\\ 2 & \text{si}\quad x>1\end{cases}$$

1. Encuentre $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ 2. Encuentre $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)$

3. Encontrar fórmulas para $f(x)\cdot g(x)$ 4. Encuentre $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\cdot g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\cdot g(x)$

5. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\cdot g(x)$?

29. Escriba la definición formal de

1. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=L$ 2. $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=M$

30. Demuestre que si $c > 0$, entonces,

$$\lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$$

31. Usando la definición formal de límite, demuestre los siguientes límites

1. $\lim_{x \to 5} 10 = 10$ 2. $\lim_{x \to -2} \pi = \pi$ 3. $\lim_{x \to 0} (x-4) = -4$ 4. $\lim_{x \to 3} x = 3$

5. $\lim_{x \to 4} 2x = 8$ 6. $\lim_{x \to 2} \frac{3x}{5} = \frac{6}{5}$ 7. $\lim_{x \to -1} (x+6) = 5$ 8. $\lim_{x \to 1} (9-6x) = 3$

9. $\lim_{t \to 0^+} \sqrt{5t} = 0$ 10. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ 11. $\lim_{x \to 0} (3x+7) = 7$ 12. $\lim_{x \to 1/2} 8(2x+5) = 48$

13. $\lim_{x \to 0} 8x^3 = 0$ 14. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{3x} = \frac{1}{6}$ 15. $\lim_{x \to 2} \frac{2x-3}{4} = \frac{1}{4}$ 16. $\lim_{x \to -5} \frac{x^2-25}{x+5} = -10$

17. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-7x+12}{2x-6} = -\frac{1}{2}$ 18. $\lim_{t \to 1} \frac{2t^3+5t^2-2t-5}{t^2-1} = 7$ 19. $\lim_{x \to -2} \left(x^2-1\right) = 3$

20. $\lim_{x \to 0} (3x+5) = 5$ 21. $\lim_{x \to 1} (2x-4) = -2$ 22. $\lim_{x \to 1} \left(x^2-1\right) = 0$

23. $\lim_{x \to 0} \left(4x^2+2\right) = 2$ 24. $\lim_{x \to 2} \left(\sqrt{2x}-4\right) = -2$ 25. $\lim_{x \to 1} (2\sqrt{x}-4) = -2$

26. $\lim_{x \to 0} \sqrt{3-x} = \sqrt{3}$ 27. $\lim_{x \to 7} \sqrt[3]{x+1} = 2$ 28. $\lim_{x \to 0} \left(\sqrt[3]{x-1}+1\right) = 0$

29. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ 30. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$ 31. $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+3} = 0$ 32. $\lim_{x \to 3} \frac{2x-1}{3x} = \frac{5}{9}$

33. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{5-x}} = \frac{1}{2}$ 34. $\lim_{x \to 1/2} \frac{3+2x}{5-x} = \frac{8}{9}$ 35. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}$

36. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$, si $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 0 \\ 2x+1, & x > 0 \end{cases}$ 37. $\lim_{x \to (1/2)^+} \sqrt{2x-1} = 0$

38. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$, si $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$ 39. $\lim_{x \to 9^-} \sqrt[4]{9-x} = 0$

32. Sean F y G funciones tales que $0 \leq F(x) \leq G(x)$ para toda x próxima a c, con la posible excepción de c. Demuestre que si $\lim_{x \to c} G(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to c} F(x) = 0$.

33. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son equivalentes a la defininción de límite?

(a) Para algún $\epsilon > 0$ y todo $\delta > 0$,

$$0 < |x-c| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < |f(x)-L| < \epsilon$$

(b) Para todo $\delta > 0$, existe un $\epsilon > 0$ correspondiente tal que

$$0 < |x-c| < \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < |f(x)-L| < \delta$$

(c) Para todo entero positivo N existe un entero positivo correspondiente M tal que

$$0 < |x-c| < 1/M \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < |f(x)-L| < 1/N$$

(d) Para todo $\epsilon > 0$ existe un correspondiente $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x-c| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < |f(x)-L| < \epsilon$$

para algún x.

34. Demuestre que, si f y g tienen límite cuando x tiende a c, entonces

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x).$$

35. Demuestre que, si f y g tienen límite cuando x tiende a c, entonces

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x).$$

36. Demuestre que, si f y g tienen límite cuando x tiende a c, entonces

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}g(x).$$

37. Demuestre que, si f y g tienen límite cuando x tiende a c, entonces

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to c}f(x)}{\lim\limits_{x\to c}g(x)}$$

siempre y cuando $\lim\limits_{x\to c}g(x)\neq 0.$

Respuestas: Ejercicios

4.1. Creciente : $\mathbb{R}$ si $m>0$, decreciente : $\mathbb{R}$ si $m<0$; 4.2. Creciente : $(0,\infty)$ y decreciente : $(-\infty,0)$; 4.3. Creciente : $\mathbb{R}$; 4.4. Creciente : $(0,\infty)$ y decreciente : $(-\infty,0)$; 4.5. Decreciente : $\mathbb{R}-\{0\}$; 4.6. Creciente : $(-\infty,0)$ y decreciente : $(0,\infty)$; 4.7. Creciente : $(0,\infty)$; 4.8. Creciente : $\mathbb{R}$; 4.9. Creciente : $\mathbb{R}$; 4.10. Creciente : $(-\infty,0)$ y decreciente : $(0,\infty)$; 4.11. Decreciente : $(-\infty,2)$ y creciente : $(2,\infty)$; 4.12. Decreciente : $\mathbb{R}-\{2\}$; 4.13. Creciente : $\mathbb{R}-\{-3\}$; 4.14. Decreciente : $(-\infty,1)$ y creciente : $(1,\infty)$; 5.1. Inyectiva; 5.2. No inyectiva; 5.3. Inyectiva; 5.4. No inyectiva; 5.5. Inyectiva; 5.6. No inyectiva; 5.7. Inyectiva; 5.8. Inyectiva; 5.9. Inyectiva; 5.10. No inyectiva; 5.11. No inyectiva; 5.12. Inyectiva; 5.13. Inyectiva; 5.14. No inyectiva; 11.1. $f^{-1}(x)=x^2+5$, Rgo $f:[0,\infty)$; 11.2. $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}+1$, Rgo $f:[-1,\infty)$; 11.3. $f^{-1}(x)=\frac{3}{x}+6$, Rgo $f:\mathbb{R}-\{0\}$; 11.4. $f^{-1}(x)=\sqrt{x^3-4}$, Rgo $f:\left[\sqrt[3]{4},\infty\right)$; 11.5. $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(3-x)$, Rgo $f:[2,4]$; 11.6. $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(\arctan x+1)^2$, Rgo $f:[-\tan(1),\infty)$; 11.7. $f^{-1}(x)=\frac{2x-1}{x-1}$, Rgo $f:\mathbb{R}-\{1\}$; 11.8. $f^{-1}(x)=\frac{4x-3}{x+1}$, Rgo $f:\mathbb{R}-\{-1\}$; 11.9. $f^{-1}(x)=\sqrt{\operatorname{arcsen}x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$, Rgo $f:[-1,1]$; 11.10. $f^{-1}(x)=(2-\arccos x)^3$, Rgo $f:[-1,1]$; 11.11. $f^{-1}(x)=\operatorname{arcsen}\left(\sqrt[3]{x}+2\right)$, Rgo $f:[-27,-1]$; 11.12. $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x-1}$, Rgo $f:[-1,1]$; 13.a. $f^{-1}(x)=\frac{b-dx}{cx-a}$; 13.$c$. $a=-d$; 14.1. $\frac{1}{3}\pi$; 14.2. $-\frac{1}{3}\pi$; 14.3. $\frac{1}{6}\pi$; 14.4. $\frac{1}{4}\pi$; 14.5. No definida; 14.6. $-\frac{1}{6}\pi$; 14.7. $-\frac{1}{6}\pi$; 14.8. $\frac{5}{9}$; 14.9. $\frac{56}{65}$; 14.10. $-\frac{16}{65}$; 15.1. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 15.2. $\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$; 15.3. $\sqrt{1-x^2}$; 15.4. $\frac{2x}{1-x^2}$; 15.5. $1-2x^2$; 15.6. $\sqrt{1+x^2}$; 15.7. $2x\sqrt{1-x^2}$; 15.8. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 16.1. Dom $g:[0,1]-\{\operatorname{sen}1\}$; 16.2. Dom $f:(0,1]$; 16.3. Dom $h:\left[\sqrt[3]{7},\sqrt[3]{9}\right]$; 16.4. Dom $f:[-1,\operatorname{sen}1]$; 16.5. Dom $f:[-1,\operatorname{sen}1)$; 16.6. Dom $h:\left[-\frac{5+\sqrt{5}}{2},-3\right]\cup\left[-2,\frac{\sqrt{5}-5}{2}\right]$; 16.7. Dom $h:\left[-2,\frac{3}{2}\right]$; 16.8. Dom $h:[-1,0]\cup[1,3]$; 16.9. Dom $f:\left[\sqrt{5},\infty\right)$; 16.10. Dom $g:\left(3,\sqrt{5}+1\right]$; 17.1. 2; 17.2. 6; 17.3. -1; 17.4. No existe; 17.5. 3; 17.6. 3; 17.7. -3; 17.8. No existe; 18.1. 1; 18.2. $\frac{1}{2}$; 18.3. $\frac{1}{2}$; 18.4. $\frac{1}{2}$; 18.5. No está definida; 18.6. $\frac{1}{4}$; 18.7. -1; 18.8. No existe; 19.1. No está definida; 19.2. 1; 19.3. 0; 19.4. No existe; 19.5. 0; 19.6. 0; 19.7. 0; 19.8. 0; 19.9. 1; 19.10. 0; 19.11. 1; 19.12. No existe; 19.13. 1; 19.14. 1; 19.15. -1; 19.16. No existe; 20.1. $-\frac{1}{2}$; 20.2. -1; 20.3. $-\frac{1}{2}$; 20.4. No existe; 20.5. No está definida; 20.6. No existe; 20.7. 1; 20.8. No existe; 20.9. No está definida; 20.10. 1; 20.11. 1; 20.12. 1; 21.1. -1; 21.2. 2; 21.3. 2; 21.4. 2; 21.5. -2; 21.6. -2; 21.7. -2; 21.8. -2; 21.9. -1; 21.10. 0; 21.11. 1; 21.12. No existe; 21.13. -1; 21.14. -1; 21.15. 1; 21.16. No existe; 22.1.a. Indefinido; 22.1.b. 8; 22.1.c. 8; 22.1.d. 8; 22.2.a. 3; 22.2.b. 0; 22.2.c. 0; 22.2.d. 0; 22.3.a. -9; 22.3.b. 1; 22.3.c. -9; 22.3.d. No existe; 22.4.a. -3; 22.4.b. -3; 22.4.c. 0; 22.4.d. No existe; 22.5.a. 3; 22.5.b. 3; 22.5.c. 3; 22.5.d. 3; 22.6.a. 0; 22.6.b. 12; 22.6.c. 4; 22.6.d. No existe; 22.7.a. Indefinido; 22.7.b. 3; 22.7.c. 1; 22.7.d. No existe; 22.8.a. -3; 22.8.b. 1;

22.8.c. 1; 22.8.d. 1; 23.1. 27; 23.2. 0; 23.3. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; 23.4. -3; 23.5. -1; 23.6. $\frac{11}{2}$; 23.7. $\frac{5}{3}$;
23.8. -1; 23.9. 0; 23.10. $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 23.11. $-\frac{1}{8}$; 23.12. $\frac{1}{3\sqrt[3]{t_0^2}}$; 23.13. $\frac{4b}{3}$; 23.14. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 23.15. $2x$;
23.16. $\frac{1}{4}$; 23.17. -6; 23.18. $\frac{1}{3}$; 23.19. 2; 23.20. 1; 23.21. $\frac{2}{3}$; 23.22. $\frac{1}{24}$; 23.23. $\frac{1}{9}\sqrt[3]{3}$; 23.24. $-\frac{7}{6}$;
23.25. 0; 23.26. $\sqrt{3}$; 23.27. 0; 23.28. No existe; 23.29. 27; 23.30. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$; 23.31. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 23.32. $-\frac{1}{56}$;
23.33. 3; 23.34. -16; 23.35. $\frac{128}{3}$; 23.36. $1-2a$; 23.37. 1; 23.38. 0; 23.39. 32; 23.40. $-\frac{1}{2}$;
23.41. 0; 23.42. $\frac{27}{40}$; 23.43. 1; 23.44. $-\frac{3}{2}$; 23.45. -2; 23.46. $\frac{1}{3}$; 23.47. $\frac{3}{2}$; 23.48. $-\frac{1}{4}$;
23.49. -3; 23.50. $\frac{b}{a}$; 23.51. $\frac{1}{4}$; 23.52. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 23.53. $-\frac{1}{x_0^2}$; 23.54. $\frac{1}{\sqrt{a}}$; 23.55. $-2\sqrt{2}$; 23.56. $\frac{1}{2}$;
23.57. $-\frac{1}{5}$; 25.1. 1; 25.2. No existe; 25.3. 0; 25.4. No existe; 25.5. 1; 25.6. 2;
26.a.1. -1 y -1; 26.a.2. -1; 26.b.1. -8 y 9; 26.b.2. No existe; 27.a.1. 0; 27.a.2. 0; 27.a.3. 1;
27.a.4. 4; 27.a.5. 6; 27.a.6. No existe; 28.1. 4 y 2; 28.2. 1 y 2; 28.4. 4 y 4; 28.5. 4;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: “Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: “Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.

Farith Briceño

Última actualizacón: Septiembre 2010

e-mail : farith_72@hotmail.com